受験数学基礎力チェック

名前＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1. $x=\sqrt{7}-\sqrt{5}$ のとき　$x+\dfrac{1}{x}$、$x^2+\dfrac{1}{x^2}$　の値を求めよ。

考え方　$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=x^2+2\cdot x\cdot\dfrac{1}{x}+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2=x^2+2+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2$ は知っておいた方がよい。

○　解答

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}\ \text{から}$$

$$x+\frac{1}{x}=\sqrt{7}-\sqrt{5}+\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{2}=\underline{\frac{3\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}}$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=\frac{63-6\sqrt{35}+5}{4}-2=\frac{60-6\sqrt{35}}{4}=\underline{\frac{30-3\sqrt{35}}{2}}$$

2. $0^\circ\leqq\theta<180^\circ$ のとき、$2\cos^2\theta+\sqrt{3}\sin\theta+2\sin\theta-2-\sqrt{3}=0$ を満たす θ を求めよ。

考え方　sin と cos が混在する場合は一方にすることを考える。$\cos^2\theta$ と $\sin\theta$ の混在なので時数の低い方の sin に合わせる。
二次式の場合は、最初に因数分解することを考える。

○　解答

$$\begin{aligned}2\cos^2\theta+\sqrt{3}\sin\theta+2\sin\theta-2-\sqrt{3}&=0\\ 2(1-\sin^2\theta)+\sqrt{3}\sin\theta+2\sin\theta-2-\sqrt{3}&=0\\ -2\sin^2\theta+\sqrt{3}\sin\theta+2\sin\theta-\sqrt{3}&=0\\ 2\sin^2\theta-\sqrt{3}\sin\theta-2\sin\theta+\sqrt{3}&=0\\ \sin\theta(2\sin\theta-\sqrt{3})-(2\sin\theta-\sqrt{3})&=0\\ (\sin\theta-1)(2\sin\theta-\sqrt{3})&=0\end{aligned}$$

より　$\sin\theta=1$、$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって　$\sin\theta=1$　から　$\theta=90^\circ$

よって　$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　から　$\theta=60^\circ,\ \ 120^\circ$

3. $p(x)$ を $x+2$ で割ると余りが -6、$x-3$ で割ると余りが 1 であるという。このとき $P(x)$ を x^2-x-6 で割ったときの余りを求めよ。

考え方　　整式の割り算では「余りは割る式よりも低次となる」ことから二次式で割ったときの余りは高々一次式であるという性質に着目する。なお、

$$P(x) \div A(x) = Q(x) \cdots R(x) \Longleftrightarrow P(x) = A(x) \times Q(x) + R(x)$$

は自在に使えるようにしたい。

○　解答

$P(x)$ を x^2-x-6 で割った商を $Q(x)$、余りを $R(x)=ax+b$ とおく。このとき、

$P(x) = (x^2-x-6)Q(x) + (ax+b) = (x-3)(x+2)Q(x) + (ax+b)$

ここで、$x=3, x=2$ で $x^2-x-6=0$ となるので

$P(3) = 3a+b = 1$　　$\cdots\cdots$　①

$P(-2) = -2a+b = -6$　　$\cdots\cdots$　②

② − ① から $5a=7$ したがって　$a = \dfrac{7}{5}$

① へ代入して解いて　$b = -\dfrac{16}{5}$

よって、求める余りは　$\dfrac{7}{5}x - \dfrac{16}{5}$

4. $\triangle OAB$ が $|\overrightarrow{OA}| = 5,\quad |\overrightarrow{OB}| = 4,\quad \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = -10$ を満たすという。このとき $\triangle OAB$ の面積 S を求めよ。

考え方　　いくつかの手順はあるが、解答 1 は簡単なのだが数字が変わると途端に解けなくなる。解答 2 は面倒だが確実。これを正確にできるようにしておくと応用が効く。

○　解答 1

$\angle AOB = \theta$ とおくと $\cos\theta = \dfrac{|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|}{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}} = \dfrac{-10}{20} = -\dfrac{1}{2}$

$0^\circ \leqq \theta < 180^\circ$ これを整理して $\theta = 120^\circ$

したがって、$S = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|\sin\theta = \dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot 4\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \underline{5\sqrt{3}}$

○　解答 2

$\angle AOB = \theta$ とおくと $\cos\theta = \dfrac{|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|}{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}} = \dfrac{-10}{20} = -\dfrac{1}{2}$

$0^\circ \leqq \theta < 180^\circ$ より、 $\sin\theta \geqq 0$ であるから、

$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

したがって、$S = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|\sin\theta = \dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot 4\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \underline{5\sqrt{3}}$

5. 曲線 C $y = x^3 - 3x$ と、点 $A(1, -3)$ がある。点 A を通り曲線 C に接する直線の方程式を求めよ。

考え方　接線の方程式は接点が定まれば求めることができる。ここでは「点 A は通過する点」であり、接点ではないことから接点を仮定するところから始まる。

○　解答

曲線 C の式を微分すると $y' = 3x^2 - 3$

そこで、接点を $P(t, t^3 - 3t)$ とおくと P における接線の方程式は、

$$y - (t^3 - 3t) = (3t^2 - 3)(x - t)$$

展開して整理して、

$$y = (3t^2 - 3)x - 2t^3 \quad \cdots\cdots \quad ①$$

と書ける。これが点 $A(1, -3)$ を通ることから代入して、

$$-3 = (3t^2 - 3) \cdot 1 - 2t^3$$

整理して

$$0 = t^2(-2t + 3) \qquad \text{から、} \qquad t = 0, \quad \frac{3}{2}$$

これを ① へ戻して、求める接線の方程式は

$t = 0$ のとき、 $\underline{y = -3x}$

$t = \dfrac{3}{2}$ のとき、$\underline{y = \dfrac{15}{4}x - \dfrac{27}{4}}$ 　である。